一．填空（2×5=10 分）

1．设关于节点$\{x_i\}_{i=0}^n$的 Lagrange 插值基函数为$\{l_i(x)\}_{i=0}^n$，则有

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^3 l_i(3.5) = \underline{\qquad\qquad} \quad (n \ge 3);$$

2．数值求积公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}f(0)+\frac{3}{4}f(\frac{2}{3})$ 的代数精确度为_____；

3．设$\mathbf{A}$是非奇异实方阵，r是非零实数，则$\mathbf{A}$和$r\mathbf{A}$具有相同的条件数．该论断____（正确、错误）；

4． 只要函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续且有零点α，就可以用反插值法求方程

$f(x)=0$

在该区间上根的近似值．该叙述_______（正确、错误）；

5． 若简单迭代格式$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$ 中迭代矩阵的谱半径大于 1，则对任意的初始向量$\mathbf{x}^{(0)}$（解向量除外），该迭代格式均发散．该论断_______（正确、错误）．

二．计算题（6×4=24 分）

1．设函数 $f(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，求差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$之值，其中$x_0,x_1,\cdots,x_k$是互异节点．

2． 用 Euler 预估-校正公式求常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = x + y^2, & 0 < x \le 0.2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的数值解，要求取步长$h=0.1$，计算结果保留 6 位小数．

3． 已知向量$\mathbf{x}=[1,0,1,0]^T$， $\mathbf{y}=[0,1,0,1]^T$，试确定反射矩阵$\mathbf{H}$，使$\mathbf{H}\mathbf{x}=\mathbf{y}$．

4．试用三角分解求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix}$$

三．(7 分) 试建立函数$y=x_1^2 x_2$的相对误差限的近似传播公式．已知有效数$x_1^*=0.10$，$x_2^*=0.02$，利用所建立的公式计算$y^*=(x_1^*)^2 x_2^*$的相对误差限．

四．（6×3=18 分）

1． 定义内积$(f,g)=\int_{-1}^{1}|x|f(x)g(x)dx$，试建立首项系数为 1 的正交多项式系$\{g_i\}_{i=0}^{+\infty}$中的前三项$\{g_i\}_{i=0}^{2}$．

2． 建立两点 Gauss 型求积公式

$$\int_{-1}^{1}|x|f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

3． 求函数 $f(x)=x^3\ (-1\le x\le 1)$ 在内积空间 $\Phi = span\{1,\ x,\ x^2\}$（权函数 $\rho(x)=|x|$）中的最佳平方逼近多项式 $p_2(x)$ 以及平方逼近误差.

五.（10 分）对方程 $e^x + x = 2$，建立求根近似值的迭代格式. 要求（1）写出隔根区间;（2）给出迭代格式收敛的初值 x_0 的范围，并证明迭代格式的收敛性.

六.（12 分）记 $f_m = f(x_m, y_m)$，对求解 $y' = f(x,y),\ y(x_0)=y_0$ 数值解的如下格式

$$y_{n+2} = ay_n + by_{n+1} + h(cf_{n+1} + df_{n+2})$$

试确定其中的参数 a,b,c,d，使该格式阶数最高，并要求给出主局部截断误差.

七.（9 分）记 $y_i = f(x_i),\ x_i = x_0 + ih\ (h>0)$，用插值法建立数值微分公式

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi)，\ \xi \in (x_0, x_2)$$

八.（10 分）已知求解线性方程组的迭代格式

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}_1\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{B}_2\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$$

式中 $\mathbf{B}_1$ 是严格下三角阵，$\mathbf{B}_2$ 是上三角阵，且满足 $\|\mathbf{B}_1\| + \|\mathbf{B}_2\| < 1$.

（1）试证明对任意 $\mathbf{x}^{(0)}$，该迭代格式收敛;

（2）建立后验误差估计 $\|\mathbf{x}^{(k)} - \boldsymbol{\alpha}\| \le \dfrac{\|\mathbf{B}_2\|}{1-\|\mathbf{B}_1\|-\|\mathbf{B}_2\|}\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 $\mathbf{x} = (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\mathbf{x} + \mathbf{f}$ 的唯一解向量，所使用的矩阵范数和向量范数是相容的.