一.（1） 3.5^3；　　（2）2；　　（3）正确；　　（4）错误；　　（5）错误.

二． 1． **解** (1)当$k\le n$时，$f(x_j)=0$，$j=0,1,\cdots,k$.

根据公式 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{n+1}(x_j)}$，故有 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=0$；

（2）当$k\ge n+1$时，考虑差商与导数的关系式 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$.

如果$k=n+1$，则 $f^{(k)}(\xi)=(n+1)!$，故此时 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=1$；

如果$k>n+1$，则 $f^{(k)}(\xi)=0$，故此时 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=0$.

2. **解** Euler 预估-校正法的计算格式为

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)})\right] \end{cases}$$

将$h=0.1,\ f(x,y)=x+y^2$代入，则

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+0.1(x_n+y_n^2) \\ y_{n+1}=y_n+0.05[(x_n+y_n^2)+(x_{n+1}+(y_{n+1}^{(0)})^2)] \end{cases}$$

将$x_0=0$，$y_0=1$代入，得

$$\begin{cases} y_1^{(0)}=1.1 \\ y(0.1)\approx y_1=1.1155 \end{cases},\qquad \begin{cases} y_2^{(0)}=1.249934 \\ y(0.2)\approx y_2=1.27083 \end{cases}$$

3． **解** 取向量 $\mathbf{v}=\pm\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2}=\pm\frac{1}{2}[1,-1,1,-1]^T$，则所得反射矩阵为

$$\mathbf{H}=\mathbf{I}-2\mathbf{v}\mathbf{v}^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4． **解** 由矩阵 Doolittle 分解的紧凑格式有

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & \big| & 6 \\ 4 & 5 & 4 & \big| & 18 \\ 6 & -3 & 5 & \big| & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & \big| & 6 \\ 2 & 3 & 0 & \big| & 6 \\ 3 & -2 & -1 & \big| & -1 \end{pmatrix}$$

回代求解得 $x_3=\dfrac{-1}{-1}=1$，$x_2=\dfrac{1}{3}(6-0\cdot x_3)=2$，$x_1=\dfrac{1}{2}(6-2x_3-x_2)=1$.

三．**解** 由 $e(y^*)\approx 2x_1^*x_2^*e(x_1^*)+(x_1^*)^2e(x_2^*)$，得 $e_r(y^*)\approx 2e_r(x_1^*)+e_r(x_2^*)$.

因 $x_1^*=0.10$ 和 $x_2^*=0.02$ 都是有效数，故

$$\left|e(x_1^*)\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-2},\quad \left|e(x_2^*)\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

且

$$\left|e_r(x_1^*)\right|\le 0.05,\quad \left|e_r(x_2^*)\right|\le 0.25$$

于是

$$\begin{aligned}\left|e_r(y^*)\right|&\approx\left|2e_r(x_1^*)+e_r(x_2^*)\right|\le 2\left|e_r(x_1^*)\right|+\left|e_r(x_2^*)\right|\\&\le 2\times0.05+0.25=0.35\end{aligned}$$

即所求相对误差限为 0.35.

四．1. **解** 设 $g_0=1, g_1=x+a, g_2=x^2+bx+c$．由正交性定义可知

$$\begin{cases}(g_0,g_1)=\int_{-1}^{1}|x|g_0g_1dx=\int_{-1}^{1}|x|(x+a)dx=0\\(g_0,g_2)=\int_{-1}^{1}|x|g_0g_2dx=\int_{-1}^{1}|x|(x^2+bx+c)dx=0\\(g_1,g_2)=\int_{-1}^{1}|x|g_1g_2dx=\int_{-1}^{1}|x|(x+a)(x^2+bx+c)dx=0\end{cases}$$

由此解得 $a=0$, $b=0$, $c=-\dfrac{1}{2}$．所以 $g_1=x$，$g_2=x^2-\dfrac{1}{2}$.

2．**解法 1** 利用上题结果可知，$g_0=1$, $g_1=x$，$g_2=x^2-\dfrac{1}{2}$ 在 $[-1,1]$ 上关于权函数 $\rho(x)=|x|$ 正交，故 $g_2=x^2-\dfrac{1}{2}$ 的零点就是所求 Gauss 点．令 $g_2=0$，得

$$x_0=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

设所求 Gauss 型求积公式为 $\int_{-1}^{1}|x|f(x)dx\approx A_0f(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})+A_1f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，其中 A_0, A_1 为待求的 Gauss 系数． 取 $f(x)=1, x$ 使上式精确相等，有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} |x| dx \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} A_0 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} A_1 = \int_{-1}^{1} |x| x dx \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 - A_1 = 0 \end{cases}$$

解得 $A_0 = A_1 = \dfrac{1}{2}$．故所求 Gauss 型求积公式为

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x) dx \approx \frac{1}{2} f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{2} f(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

解法 2 因为两点 Gauss 型求积公式的代数精确度为 3．所以，当 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 时有如下等式成立

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} |x| dx = 1 \\ x_0 A_0 + x_1 A_1 = \int_{-1}^{1} |x| x dx = 0 \\ x_0^2 A_0 + x_1^2 A_1 = \int_{-1}^{1} |x| x^2 dx = \dfrac{1}{2} \\ x_0^3 A_0 + x_1^3 A_1 = \int_{-1}^{1} |x| x^3 dx = 0 \end{cases}$$

解此非线性方程组得 $x_0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $A_0 = A_1 = \dfrac{1}{2}$

所求 Gauss 型求积公式为

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x) dx \approx \frac{1}{2} f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{2} f(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

3． **解法 1** 在空间 $\Phi = span\{1, x, x^2\}$ 中取另外一组基 $g_0 = 1, g_1 = x, g_2 = x^2 - \dfrac{1}{2}$．

由“1”的结论可知，它们在 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $\rho(x) = |x|$ 两两正交，所以相应的正规方程组为

$$\begin{pmatrix} (g_0, g_0) & & \\ & (g_1, g_1) & \\ & & (g_2, g_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, g_0) \\ (f, g_1) \\ (f, g_2) \end{pmatrix}$$

其中

$$(f, g_0) = \int_{-1}^{1} |x| x^3 dx = 0, \qquad (f, g_1) = \int_{-1}^{1} |x| x^3 x dx = \frac{1}{3}$$

$$(f, g_2) = \int_{-1}^{1} |x| x^3 (x^2 - \frac{1}{2}) dx = 0, \quad (g_1, g_1) = \int_{-1}^{1} |x| x^2 dx = \frac{1}{2}$$

故 $c_0 = \dfrac{(f, g_0)}{(g_0, g_0)} = 0, \quad c_1 = \dfrac{(f, g_1)}{(g_1, g_1)} = \dfrac{2}{3}, \quad c_2 = \dfrac{(f, g_2)}{(g_2, g_2)} = 0$．所求最佳平方逼近多项式为

$$p_2(x)=c_0g_0+c_1g_1+c_2g_2=\frac{2}{3}x$$

平方逼近误差为

$$\|\delta(x)\|_2^2=\|f-p_2\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{i=0}^{2}c_i(f,g_i)=\frac{1}{36}\approx 0.027778$$

解法 2　取基函数 $\varphi_0=1$，$\varphi_1=x$，$\varphi_2=x^2$，相应的正规方程组为

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2)\\ (\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\(f,\varphi_1)\\(f,\varphi_2)\end{pmatrix}$$

亦即

$$\begin{pmatrix}1 & & 1/2\\ & 1/2 & \\ 1/2 & & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$$

解得 $a_0=0$, $a_1=\frac{2}{3}$, $a_2=0$，所求最佳平方逼近多项式为

$$p_2(x)=a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+a_2\varphi_2=\frac{2}{3}x$$

平方逼近误差为

$$\|\delta(x)\|_2^2=\|f-p_2\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{i=0}^{2}a_i(f,\varphi_i)=\frac{1}{36}\approx 0.027778$$

五．　**解**（1）设 $f(x)=e^x+x-2$．　由 $f(0)<0,\ f(0.8)>0$，$f'(x)=e^x+1>0$，得隔根区间为[0,0.8].

（2）将 $e^x+x=2$ 等价变形为 $x=\ln(2-x)$，取 $\varphi(x)=\ln(2-x)$.

则当 $0\le x\le 0.8$ 时，有 $0<\varphi(x)<0.8$，且 $|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{x-2}\right|\le\frac{1}{1.2}<1$，故

$$x_{n+1}=\ln(2-x_n),\ n=0,1,\cdots$$

对 $\forall x_0\in[0\ ,\ 0.8]$ 均收敛.

六．　**解**　由定义，所给格式的局部截断误差为

$$R_{n+2}=y(x_{n+2})-ay(x_n)-by(x_{n+1})-h[cy'(x_{n+1})+dy'(x_{n+2})] \tag{1}$$

将 $y(x_{n+2}),\ y(x_{n+1}),\ y'(x_{n+1}),\ y'(x_{n+2})$ 在点 x_n 作 Taylor 展开有

$$y(x_{n+2})=y(x_n)+2hy'(x_n)+\frac{(2h)^2}{2}y''(x_n)+\frac{(2h)^3}{3!}y'''(x_n)+\frac{(2h)^4}{4!}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$$

$$y'(x_{n+1})=y'(x_n)+hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_n)+O(h^4)$$

$$y'(x_{n+2})=y'(x_n)+2hy''(x_n)+\frac{(2h)^2}{2}y'''(x_n)+\frac{(2h)^3}{3!}y^{(4)}(x_n)+O(h^4)$$

代入（1）式并整理得

$$\begin{aligned}R_{n+2}=&[-a-b+1]y(x_n)+[-b+2-c-d]hy'(x_n)+[-\frac{b}{2!}+\frac{2^2}{2!}-c-2d]h^2y''(x_n)\\&+[-\frac{b}{3!}+\frac{2^3}{3!}-\frac{c}{2!}-\frac{2^2d}{2!}]h^3y'''(x_n)+[-\frac{b}{4!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{c}{3!}-\frac{2^3d}{3!}]h^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5)\end{aligned} \tag{2}$$

令 $R_{n+2}=O(h^4)$，即令右端前四项系数为零，可得参数 a,b,c,d 满足的线性方程组

$$\begin{cases}a+b-1=0\\b+c+d-2=0\\\dfrac{b}{2}+c+2d-2=0\\\dfrac{b}{6}+\dfrac{c}{2}+2d-\dfrac{4}{3}=0\end{cases} \tag{3}$$

由此解得 $a=\frac{1}{5},b=\frac{4}{5},c=\frac{4}{5},d=\frac{2}{5}$，于是截断误差（2）式成为

$$R_{n+2}=-\frac{1}{30}h^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$$

所以，此时格式的阶数最高，且该格式为三阶方法，局部截断误差主项为 $-\frac{1}{30}h^4y^{(4)}(x_n)$.

七. **解** 由 Lagrange 插值公式有

$$f(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)，\quad \xi\in(x_0,x_2)$$

求导得

$$f'(x)=\frac{2x-x_1-x_2}{2h^2}y_0+\frac{2x-x_0-x_2}{-h^2}y_1+\frac{2x-x_0-x_1}{2h^2}y_2$$

$$+\frac{1}{6}[f^{(3)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)]', \quad \xi\in(x_0,x_2)$$

将 $x=x_0$ 代入，得

$$f'(x_0)=\frac{-3h}{2h^2}y_0+\frac{-2h}{-h^2}y_1+\frac{-h}{2h^2}y_2+\frac{f'''(\xi)}{6}2h^2$$

$$=\frac{1}{2h}(-3y_0+4y_1-y_2)+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi)\text{，}\quad \xi\in(x_0,x_2)$$

八． **解**(1) **解法 1** 将迭代公式与方程相减，有

$$\mathbf{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{B}_1(\mathbf{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{B}_2(\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha})$$

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{\alpha}\|\le\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{\alpha}\|+\|\mathbf{B}_2\|\|\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}\|$$

因为$\|\mathbf{B}_1\|+\|\mathbf{B}_2\|<1$，所以$\|\mathbf{B}\|_1<1$，$\dfrac{\|\mathbf{B}_2\|}{1-\|\mathbf{B}_1\|}<1$，于是

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{\alpha}\|\le\frac{\|\mathbf{B}_2\|}{1-\|\mathbf{B}_1\|}\|\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}\|\le\left(\frac{\|\mathbf{B}_2\|}{1-\|\mathbf{B}_1\|}\right)^2\|\mathbf{x}^{(k-1)}-\boldsymbol{\alpha}\|$$

$$\le\cdots\le\left(\frac{\|\mathbf{B}_2\|}{1-\|\mathbf{B}_1\|}\right)^{k+1}\|\mathbf{x}^{(0)}-\boldsymbol{\alpha}\|\to 0 \qquad (k\to\infty)$$

所以对任意 $\mathbf{x}^{(0)}$，该迭代格式收敛.

解法 2 由迭代格式得迭代矩阵为$\mathbf{B}=(\mathbf{I}-\mathbf{B}_1)^{-1}\mathbf{B}_2$． 设该矩阵的特征值为$\lambda$，令

$$\det(\lambda\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\mathbf{B}_1)^{-1}\mathbf{B}_2)=0 \qquad \text{即} \qquad \det(\lambda(\mathbf{I}-\mathbf{B}_1)-\mathbf{B}_2)=0$$

由于齐次方程组$(\lambda(\mathbf{I}-\mathbf{B}_1)-\mathbf{B}_2)\mathbf{x}=\mathbf{0}$有非零解，故有$\lambda\mathbf{x}=\lambda\mathbf{B}_1\mathbf{x}+\mathbf{B}_2\mathbf{x}$． 取范数则得

$$|\lambda|\|\mathbf{x}\|\le|\lambda|\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{B}_2\|\|\mathbf{x}\|$$

故
$$|\lambda|\le\frac{\|\mathbf{B}_2\|}{1-\|\mathbf{B}_1\|} \qquad （\|\mathbf{B}_1\|<1）$$

因为$\|\mathbf{B}_1\|+\|\mathbf{B}_2\|<1$，所以$\|\mathbf{B}\|_1<1$，$\dfrac{\|\mathbf{B}_2\|}{1-\|\mathbf{B}_1\|}<1$，谱半径$\rho(\mathbf{B})<1$． 故对任意$\mathbf{x}^{(0)}$，该迭代格式收敛.

(2) 将迭代公式与方程相减，有

$$\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{B}_1(\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{B}_2(\mathbf{x}^{(k-1)}-\boldsymbol{\alpha})$$

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}\right\| &\le \left\|\mathbf{B}_1\right\|\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}\right\|+\left\|\mathbf{B}_2\right\|\left\|\mathbf{x}^{(k-1)}-\boldsymbol{\alpha}\right\| \\
&= \left\|\mathbf{B}_1\right\|\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}\right\|+\left\|\mathbf{B}_2\right\|\left\|\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x}^{(k)}+\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}\right\| \\
&\le \left\|\mathbf{B}_1\right\|\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}\right\|+\left\|\mathbf{B}_2\right\|\left(\left\|\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|+\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}\right\|\right) \\
&= \left(\left\|\mathbf{B}_1\right\|+\left\|\mathbf{B}_2\right\|\right)\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}\right\|+\left\|\mathbf{B}_2\right\|\left\|\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|
\end{aligned}
$$

所以

$$
\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\boldsymbol{\alpha}\right\| \le \frac{\left\|\mathbf{B}_2\right\|}{1-\left\|\mathbf{B}_1\right\|-\left\|\mathbf{B}_2\right\|}\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\right\|
$$